# PT Programme de Colles
# Semaine 16

**Variables aléatoires discrètes**

- Variable aléatoire discrète, loi d'une variable aléatoire discrète
- Rappels des lois vues en 1ère année : loi de Bernoulli, loi uniforme sur un ensemble fini, loi binomiale
- Loi géométrique, loi de Poisson
- Couple ou $n$-uplet de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe, lois marginales.
- Loi conditionnelle d'une variable aléatoire $X$ sachant un événement $A$.
- Variables aléatoires indépendantes, indépendance mutuelle. Lemme des coalitions
- Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle, espérance des lois usuelles
- Théorème de transfert, y compris pour les fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
- Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance
- Variance des lois usuelles
- Fonction génératrice $G_X$ de la variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$
- Fonctions génératrices des lois usuelles
- Utilisation de $G_X$ pour calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
- Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres (la notion de convergence en probabilité n'est pas au programme)

**Intégrales à paramètre**

- Fonction définie par une intégrale
- Théorème de continuité : si $A$ et $I$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$, telle que :
  — pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $A$ ;
  — pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $I$ ;
  — il existe une fonction $\varphi$ intégrable sur $I$, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ ;

  alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $A$.
- Théorème de dérivation : si $A$ et $I$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$, telle que :
  — pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A$ ;
  — pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $I$ ;
  — pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $A$ ;
  — il existe une fonction $\varphi$ intégrable sur $I$, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ ;

  alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A$ et vérifie :

  $$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$
- Remarque : le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire.